EGY POLIÉDER, MELYNEK BÁRMELY KÉT LAPJA SZOMSZÉDOS

SZILASSI LAJOS

1. Közismert, hogy a tetraédernek van két olyan tulajdonsága, amely az egyszerű poliéderek körében egyedülálló. Az egyik az, hogy bármely két csúcsát él köti össze, azaz nincs átlója, a másik — amely az előbbi tulajdonság duálisnak is tekinthető — az, hogy bármely két lapjának van közös éle, azaz bármely két lapja szomszédos.

Felvethető a kérdés, hogy léteznek-e még további olyan poliéderek, amelyek rendelkeznek az egyik, vagy másik tulajdonsággal. CSÁSZÁR ÁKOS [1] megmutatta, hogy van még egy olyan poliéder, amelynek nincs átlója. Nyitott kérdés, hogy van-e még további ilyen poliéder. (L. [2].)

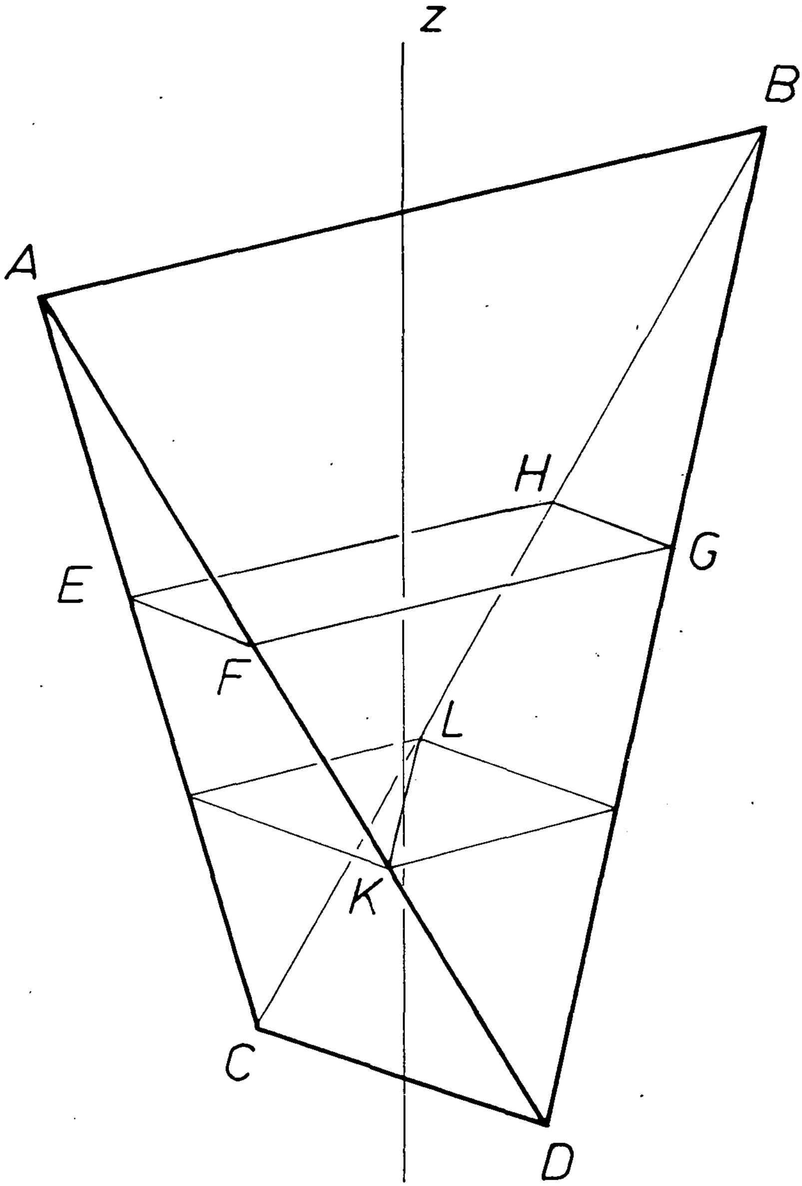
Topológiai szempontból a CSÁSZÁR-POLIÉDER egy tóruszra rajzolt teljes gráf, melynek minden tartományát három él határolja. Ennek a duálisa egy olyan tóruszra rajzolt gráf, amelynek minden csúcsából három él indul ki, és az élek hét olyan tartományra osztják a tóruszt, hogy közülük bármely kettő szomszédos. Ez a közismert HEAWOOD-KONSTRUKCIÓ: az a tóruszra rajzolt térkép, melynek a kiszínezéséhez hét színre van szükség. (L. [2], [3]) Ismert olyan síklapokból álló — sőt szabályos sokszögekből felépített — tórusszal homeomorf poliéder, azaz toroid, amelynek a lapjait alkalmas módon színezve, és az azonos színűeket egy tartománynak tekintve előáll a hét, egymással páronként szomszédos tartomány. (L. [4]) Nincs tudomásunk azonban arról, hogy felvetődött-e az a kérdés, miszerint ilyen toroid hét síklapból is előállítható.

Meg fogjuk mutatni, hogy van olyan hét síklappal határolt, tórusszal homeomorf közönséges poliéder, melynek bármely két lapja szomszédos, majd közöljük egy realizálható modelljének a numerikus adatait.

2. Tekintsünk egy olyan tetraédert, melynek a lapjai egyenlőszárú háromszögek. Ennek bármely két lapja szomszédos. Az lesz a feladatunk, hogy további három sík felvételével képezzünk a tetraéderből egy olyan toroidot, hogy az új síkokra eső lapok mindegyike szomszédos legyen egymással és a tetraéder mindegyik lapjával. Természetesen a tetraéder éleinek, vagy azok egy-egy darabjának meg kell maradnia.

Válasszuk a tetraéder csúcsainak a jelölését úgy, hogy $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ legyen. Jelöljük továbbá az $\overline{AB}$ és $\overline{CD}$ oldalak felezőpontjait összekötő egyenest z-vel. (1. ábra.) A tetraéder tengelyesen szimmetrikus z-re. A további három síkot is úgy fogjuk felvenni, hogy a kapott alakzatnak megmaradjon ez a tulajdonsága.

Ha a tetraédert z-re merőleges (azaz $\overline{AB}$-vel és $\overline{CD}$-vel párhuzamos) síkokkal metszük, a síkmetszet mindig téglalap lesz. Amint a metsző sík $\overline{AB}$-től $\overline{CD}$ felé halad, a síkmetszetként kapott téglalap $\overline{AB}$-vel párhuzamos oldala folytonosan csökken, $\overline{CD}$-vel párhuzamos oldala pedig nő. Válasszunk ki két tetszőleges, z-re merőleges



1. ábra

síkmetszetet. Jelölje az $\overline{AB}$ oldalhoz közelebbi síkmetszet csúcsait rendre E, F, G, H, ($E\in\overline{AC}$, $F\in\overline{AD}$). Jelölje továbbá K és L a másik síkmetszet átlói közül annak a végpontjait, melyek ugyanarra a tetraéder-élre illeszkednek, mint F, ill. H.

Fúrjuk át az ABCD tetraédert egy olyan prizmával, amelynek egyik éle a (KL) egyenes, a másik két — (KL)-lel párhuzamos — éle pedig z-re szimmetrikusan helyezkedik el, és az EFGH téglalapot a szomszédos $\overline{HE}$ és $\overline{EF}$, illetve $\overline{FG}$ és $\overline{GH}$ élein metszi. (2. ábra) Jelölje a prizma éleinek az EFGH téglalappal (azaz a tetraéderrel) alkotott metszéspontjait P, Q, R és S ($P \in \overline{HE}$, $Q \in \overline{EF}$, $R \in \overline{FG}$, $S \in \overline{GH}$).

Az így létrehozott toroidnak a PQFRSH hatszög-lapja szomszédos lesz az összes többi lappal. A KLPQ és a vele egybevágó KLSR trapéz száraival az alapul vett tetraéder két lapjához, alapjaival a másik két új laphoz csatlakozik. Ezeknek a lapoknak még nincs közös élük a tetraéder két-két lapjával. Ugyanakkor feleslegessé vált az $\overline{AD}$ és $\overline{BC}$ él egyik megmaradt darabja, $\overline{KD}$ és $\overline{LC}$. A hiányzó élek előállítása és a feleslegesek megszüntetése céljából a kapott idomot ki fogjuk egészíteni két kis tetraéderrel, amelyek lapjai a már meglevő lapok síkjaiból állnak elő.

Legyen $(QK) \cap (CD) = M$ és $(LM) \cap (BD) = U$. (Lényegében M a KLQ sík és a (CD) egyenes metszéspontja.) Az egyik kiegészítő tetraéder KMDU lesz. Hasonlóan kapjuk a z-re való szimmetriát megőrizve az $(SL) \cap (DC) = N$ és $(NK) \cap (AC) = V$ pontokat, illetve az NLCV kiegészítő tetraédert. Mondhatjuk, hogy a hiányolt közös élek $\overline{KU}$ és $\overline{UM}$, illetve $\overline{LV}$ és $\overline{VN}$. A probléma most már csak az, hogy a PQM UKL töröttvonal (és z-re vonatkozó tükörképe RSNVLK) nem egyszerű sokszög, mivel $K \in QM$, (illetve $L \in SN$).

Ahhoz, hogy ezt a nem kívánt illeszkedést elkerüljük, elegendő a szóban forgó töröttvonalak síkjait kissé elforgatnunk a (PQ), ill. (RS) egyenesek közül úgy, hogy a közös $\overline{KL}$ élük továbbra is illeszkedjen z-re, és kerüljön közelebb az EFGH síkhoz. Így e töröttvonalak csúcspontjai is elmozdulnak P, Q, R és S kivételével. Az elmozduló pontok új helyzetének a jelölésére használjuk az eredeti betűket *-gal ellátva. Mivel $\overline{K^*L^*} \| \overline{KL}$, K^* és L^* az ABD, illetve ABC háromszög belsejébe kerül, így nem lehet közös pontja a tetraéder másik két lapjára illeszkedő (QM^*), ill. (SN^*) egyenesekkel. Így a megmozgatott két lap is egyszerű sokszöggé vált, a toroid többi lapja pedig a mi szempontunkból nem változott lényegesen. Ezzel megkaptuk a keresett hét lapú közönséges poliédert, amelynek csúcsai tehát (a z-re szimmetrikusokat egymás mellett felsorolva): A, B; P, R; Q, S; F, H; K^*, L^*; U^*, V^*; M^*, N^*.

3. A poliéder konkrét előállításához válasszuk az alapul vett tetraéder csúcsainak a derékszögű koordinátáit a következőképpen:

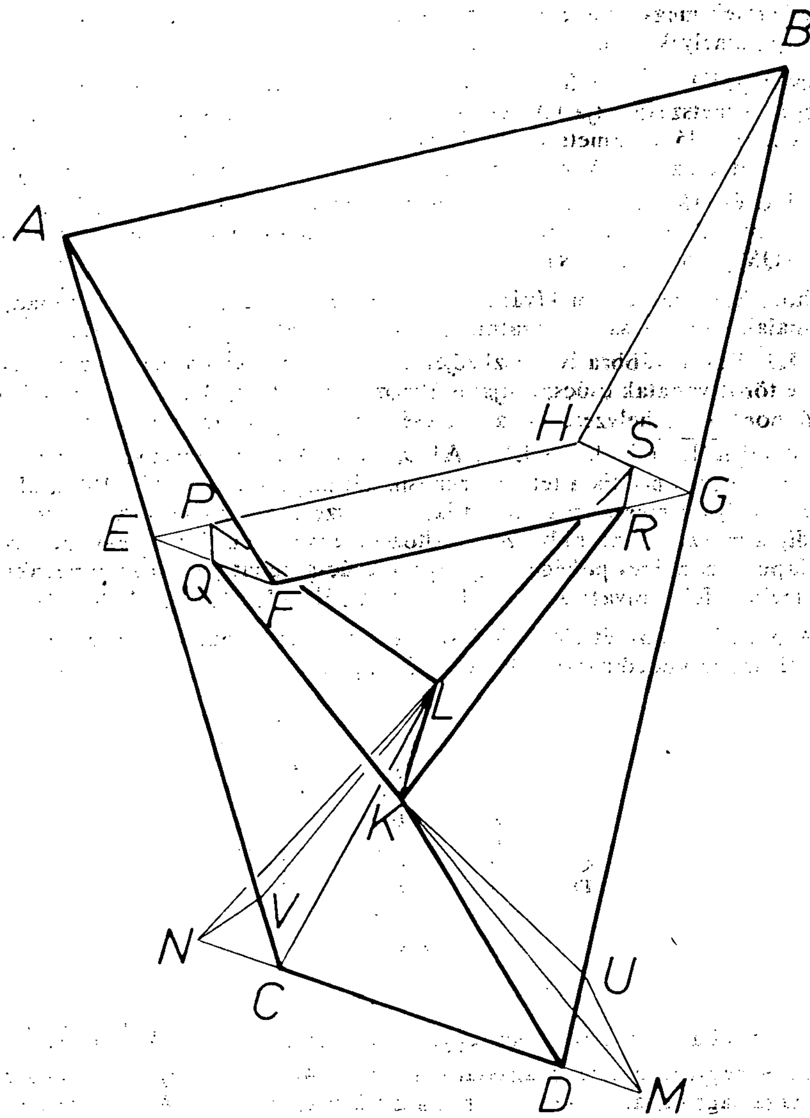
	x	y	z
A	12	0	12
B	−12	0	12
C	0	−6	−12
D	0	6	−12

1. táblázat

$\overline{K^*L^*}$-ot válasszuk úgy, hogy egyenlő szöget zárjon be $\overline{AB}$-vel és $\overline{CD}$-vel. Ekkor $\overline{KL}$ a négyzet-metszet magasságában, $z = -4$-nél lesz. Így $\overline{K^*L^*}$ választható $z = -3$ magasságban, az EFGH sík pedig $z = 2$ magasságban. A további két síkot válasszuk úgy, hogy a Q ill. S csúcs az EFGH téglalap rövidebbik élének a felezőpontjára essen. Így a poliéder síkjainak egyenletei a következők:

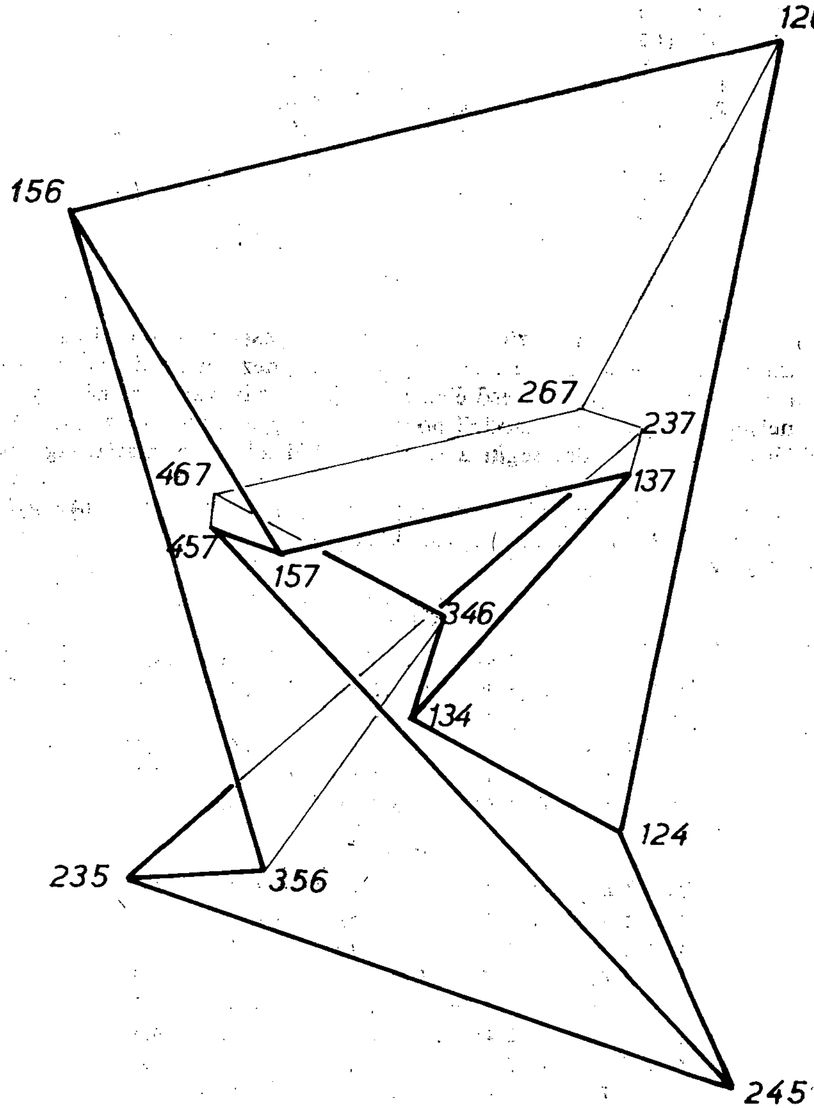
(1)		4 y	+ z = 12	(A B D)	sík
(2)	− 2 x		− z = 12	(B C D)	sík
(3)	− 5 x	+ 5 y	− 7z = 21	(K* L* S)	sík
(4)	5 x	− 5 y	− 7z = 21	(K* L* Q)	sík
(5)	2 x		− z = 12	(A C D)	sík
(6)		− 4 y	+ z = 12	(A B C)	sík
(7)			z = 2	(Q R S)	sík

2. táblázat



2. ábra

Célszerű a poliéder csúcsait az eddig használt jelölés helyett három számmal, a rá illeszkedő síkok számaival jellemezni. Ilyen jelölés mellett könnyebb lesz áttekintenünk az egy lapra eső csúcsokat és éleket. (3. ábra)



3. ábra

A síkok egyenleteiből kiindulva a csúcsok koordinátáira a következő értékeket kapjuk:

Csúcsók	x	y	z
B =(1 2 6)	−12	0	12
A =(1 5 6)	12	0	12
N* =(2 3 5)	0	−12,60	−12
M* =(2 4 5)	0	12,60	−12
V* =(3 5 6)	2	−5	−8
U* =(1 2 4)	−2	−5	−8
L* =(3 4 6)	−3,75	−3,75	−3
K* =(1 3 4)	3,75	3,75	−3
P =(4 6 7)	4,50	−2,50	2
R =(1 3 7)	−4,50	2,50	2
S =(2 3 7)	−7	0	2
Q =(4 5 7)	7	0	2
H =(2 6 7)	−7	−2,50	2
F =(1 5 7)	7	2,50	2

3. táblázat

A poliéder realizálásához szükséges adatok a csúcspontok koordinátáiból egyszerűen számíthatók. A modellkészítés megkönnyítéséhez két tizedesnyi pontosságig számolva megadjuk az egy lapra eső élek és átlók hosszát, valamint néhány további adatot, melyek elősegíthetik a modell pontosabb és gyorsabb elkészítését. A szükségesnél lényegesen több adat segíti a szerkesztésből adódó pontatlanság kiküszöbölését.

Mivel az alakzat szimmetrikus z-re, (1) — (6), (2) — (5) és (3) — (4) egybevágó lap-párok lesznek, így ezek adatait együtt közöljük.

Az (1) és (6) lap adatai:

oldalak
D(1 2 6) — (1 5 6) = D(1 5 6) — (1 2 6) = 24,00
D(1 5 6) — (1 5 7) = D(1 2 6) — (2 6 7) = 11,45
D(1 5 7) — (1 3 7) = D(2 6 7) — (4 6 7) = 11,50
D(1 3 7) — (1 3 4) = D(4 6 7) — (3 4 6) = 9,72
D(1 3 4) — (1 2 4) = D(3 4 6) — (3 5 6) = 7,72
D(1 2 4) — (1 2 6) = D(3 5 6) — (1 5 6) = 22,91
átlók
D(1 2 6) — (1 5 7) = D(1 5 6) — (2 6 7) = 21,61
D(1 2 6) — (1 3 7) = D(1 5 6) — (4 6 7) = 12,74
D(1 2 6) — (1 3 4) = D(1 5 6) — (3 4 6) = 22,07
D(1 5 6) — (1 3 7) = D(1 2 6) — (4 6 7) = 19,45
D(1 5 6) — (1 3 4) = D(1 2 6) — (3 4 6) = 17,52
D(1 5 6) — (1 2 4) = D(1 2 6) — (3 5 6) = 24,91
D(1 5 7) — (1 3 4) = D(2 6 7) — (3 4 6) = 6,09
D(1 5 7) — (1 2 4) = D(2 6 7) — (3 5 6) = 13,68
D(1 3 7) — (1 2 4) = D(4 6 7) — (3 5 6) = 10,60

4. táblázat

Az (156)—(157) és (126)—(124) oldalak meghosszabbításából adódó egyenlőszárú háromszög (ABD háromszög) D=(125) csúcsából kiinduló magassága m=

$=24{,}73$, a párhuzamos élek távolsága ennek 10/24-szerese: $d=10{,}30$. A $K^{*}=(134)$ csúcs az (156) — (157) él egyenesétől (A—D-től) $t=0{,}67$ távolságra van.

A (2) és (5) lap adatai:

oldalak
D(2 4 5) — (2 3 5) = D(2 3 5) — (2 4 5) = 25,20
D(2 3 5) — (2 3 7) = D(2 4 5) — (4 5 7) = 20,09
D(2 3 7) — (2 6 7) = D(4 5 7) — (1 5 7) = 2,50
D(2 6 7) — (1 2 6) = D(1 5 7) — (1 5 6) = 11,45
D(1 2 6) — (1 2 4) = D(1 5 6) — (3 5 6) = 22,91
D(1 2 4) — (2 4 5) = D(3 5 6) — (2 3 5) = 8,81
átlók
D(2 4 5) — (2 3 7) = D(2 3 5) — (4 5 7) = 20,09
D(2 4 5) — (2 6 7) = D(2 3 5) — (1 5 7) = 21,74
D(2 4 5) — (1 2 6) = D(2 3 5) — (1 5 6) = 29,64
D(2 3 5) — (2 6 7) = D(2 4 5) — (1 5 7) = 18,62
D(2 3 5) — (1 2 6) = D(2 4 5) — (1 5 6) = 29,64
D(2 3 5) — (1 2 4) = D(2 4 5) — (3 5 6) = 18,15
D(2 3 7) — (1 2 6) = D(4 5 7) — (1 5 6) = 11,18
D(2 3 7) — (1 2 4) = D(4 5 7) — (3 5 6) = 12,24
D(2 6 7) — (1 2 4) = D(1 5 7) — (3 5 6) = 13,46

5. táblázat

Az $AN^{*}M^{*}=(156)$ (235) (245) egyenlőszárú háromszög $A=(156)$ csúcsából kiinduló magassága $m=26{,}83$, a párhuzamos élek távolsága ennek 14/24-szerese: $d=15{,}65$.

A (3) és (4) lap adatai:

oldalak
D(2 3 7) — (2 3 5) = D(4 5 7) — (2 4 5) = 20,09
D(2 3 5) — (3 5 6) = D(2 4 5) — (1 2 4) = 8,81
D(3 5 6) — (3 4 6) = D(1 2 4) — (1 3 4) = 7,72
D(3 4 6) — (1 3 4) = D(1 3 4) — (3 4 6) = 10,60
D(1 3 4) — (1 3 7) = D(3 4 6) — (4 6 7) = 9,72
D(1 3 7) — (2 3 7) = D(4 6 7) — (4 5 7) = 3,53
átlók
D(2 3 7) — (3 5 6) = D(4 5 7) — (1 2 4) — 14,35
D(2 3 7) — (3 4 6) = D(4 5 7) — (1 3 4) = 7,04
D(2 3 7) — (1 3 4) = D(4 5 7) — (3 4 6) = 12,43
D(2 3 5) — (3 4 6) = D(2 4 5) — (1 3 4) = 13,16
D(2 3 5) — (1 3 4) = D(2 4 5) — (3 4 6) = 19,03
D(2 3 5) — (1 3 7) = D(2 4 5) — (4 6 7) = 21,07
D(3 5 6) — (1 3 4) = D(1 2 4) — (3 4 6) = 10,22
D(3 5 6) — (1 3 7) = D(1 2 4) — (4 6 7) = 14,08
D(3 4 6) — (1 3 7) = D(1 3 4) — (4 6 7) = 8,03

6. táblázat

A $\overline{K^*L^*} = (134) — (346)$ és a vele párhuzamos $\overline{QP} = (457)—(467)$ él távolsága d = =7,03. A $K^* = (134)$ csúcsnak a $\overline{QM^*} = (457)—(245)$ éltől mért távolsága t = 1,03. A toroid kialakításánál ezt a távolságot növeltük 0-ról 1,03-ra. A $\overline{K^*L^*}$ metszésvonal további emelésével tovább is növelhetnénk, de ekkor $\overline{M^*N^*}$ aránytalanul megnőne.

A (7) lap adatai:

oldalak
D(1 5 7) — (1 3 7) = 11,50
D(1 3 7) — (2 3 7) = 3,53
D(2 3 7) — (2 6 7) = 2,50
D(2 6 7) — (4 6 7) — 11,50
D(4 6 7) — (4 5 7) = 3,53
D(4 5 7) — (1 5 7) = 2,50

7. táblázat

Ez a középpontosan szimmetrikus hatszög lényegében egy 5 és 14 oldalhosszúságú téglalapból alakítható ki, levágva belőle két egyenlőszárú derékszögű háromszöget, melyek befogói 2,5 hosszúak.*

4. A kapott hét síklappal határolt toroid topológiailag a CSÁSZÁR-POLIÉDER *duálisnak* tekinthető. (Hasonlítsuk össze a jelen dolgozat 3. táblázatát és az [1]-ben levő 1. táblázatot.)

Felvethető a kérdés, hogy van-e a két poliédernek olyan modellje, melyek egy térbeli polaritással egymásban átvihetők. Ugyancsak megfogalmazható a [2]-ben felvetett probléma duálisaként az a kérdés, hogy azok között a magasabb rendszámú felületek között, amelyekre rajzolható páronként szomszédos tartományokkal rendelkező térkép, van-e további olyan, amely a tartományokkal egyező számú síklappal realizálható.

* A fenti számításokat — megfelelő program elkészítése után — a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola WANG 2200/C típusú kisszámítógépén végeztük.

IRODALOM

[1] CSÁSZÁR Á.: A polyhedron without diagonals, Acta Sci. Math. 13 (1949—50), 140—142.
[2] GARDNER M.: On the remarkable Császár polyhedron and its applications in problem solving, Scientific American, 1975/5, 102—107.
[3] BOLTYANSZKIJ V. G.—JEFREMOVICS V. A.: Szemléletes topológia, Tankönyvkiadó, Bp. 1965.
[4] STEWART B. M.: Adventures among the Toroids, Okemos, Michigan, 1970.

DER POLYEDER, DESSEN JEGLICHE ZWEI FLÄCHEN BENACHBART SIND

Lajos Szilassi

Ákos CSÁSZÁR [1] hat gezeigt, dass ausser dem Tetraeder noch ein Polyeder existiert, der keine Diagonale hat. Die vorliegende Arbeit behandelt die Duale des Problems; es wird erwiesen, dass es ausser dem Tetraeder noch einen gewöhnlichen Polyeder gibt, dessen gleich welche beiden Flächen benachbart sind, d. h: von dem sämtliche zwei Flächen eine gemeinsame Kante haben. Dieses Ergebnis bedeutet, dass eine auf den wohlbekannten Heawod-sche Thorus gezeichnete siebenfarbige Landkarte [2] auch mit sieben Flächen realisierbar ist (Abb. 3). Schliesslich werden die numerischen Daten eines Modells des erhaltenen Polyeders mitgeteilt (Tabellen 2—6).

ПОЛИЭДР, ЛЮБЫЕ ДВЕ ГРАНИ КОТОРОГО ЯВЛЯЮТСЯ СМЕЖНЫМИ

Л. Силаши

А. Часар [1] доказал, что кроме тетраэдра существует ещё один полиедр, неимеющий диагонали. В данной статье занимаемся двойственностью проблемы. Мы доказываем, что кроме тетраэдра существует ещё один обыкновенный полиэдр, любые две грани которого являются смежными, то есть, у любых двух граней существует общая грань. Это означает, что общеизвестная семи-цветная карта на Heawood-топе [2] может быть реализована семи плоскостями [черт. 3]. Наконец, даём числовые данные одной модели полученного полиэдра [таблицы 2—6].